Profesor:
Fortunato Mendoza

PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

NÚMEROS RACIONALES

NÚMEROS FRACCIONARIOS

NÚMEROS RACIONALES

NÚMERO FRACCIONARIO

Son aquellos números de la forma:

$$\boxed{f = \frac{A}{B}}$$

A: numerador

B: denominador

Donde A y B son números enteros y B$\neq 0$

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

Consideraremos a los términos de las fracciones como enteros positivos.

Sea la fracción: $f = \frac{A}{B}$

1. **Por la comparación de su valor respecto de la unidad**

a) **Propia** .- Cuando A$< B \;\; o \; f < 1$

Ejemplo: $\frac{8}{15}; \frac{12}{27}; \frac{15}{25}$

b) **Impropia**.- Cuando A$> B \;\; o \; f > 1$

Ejemplo: $\frac{25}{9}; \frac{18}{15}; \frac{35}{21}$

2. Por los divisores comunes de sus términos

a) Irreductible.- Cuando A y B son PESI

Ejemplo: $\frac{8}{15}; \frac{25}{9}; \frac{15}{34}$

b) Reductible.- Cuando A y B no son PESI

Ejemplo: $\frac{18}{15}; \frac{21}{35}; \frac{45}{60}$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Una fracción es equivalente a otra, cuando tienen distinta representación, pero provienen de una misma fracción irreductible.

Ejemplo:

Sea la fracción irreductible :

$$f_i = \frac{2}{3} \rightarrow f_e = \frac{2k}{3k} \; ; \; k \in Z - \{0\}$$

Dando valores a k

$$\underbrace{\ldots\ldots = \frac{-4}{-6} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \ldots\ldots}_{\text{fracciones equivalentes}}$$

Ejemplo

Sea $f = \frac{350}{630}$

1°) $MCD(350;630) = 70$

2°) $f_I = \frac{\frac{350}{70}}{\frac{630}{70}} = \frac{5}{9} \rightarrow f_E = \frac{5k}{9k}$

PROPIEDAD

Dada dos fracciones irreductibles $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

Si $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k$; $(k \in Z)$

entonces: $b = d$

DIVISIBILIDAD DE FRACCIONES

Dadas las fracciones $f_1 = \frac{a}{b}$ y $f_2 = \frac{c}{d}$

Si se cumple: $\frac{f_1}{f_2} = k$; $(k \in Z)$

entonces f_1 es divisible entre f_2

$\#s\ A\ y\ B \Rightarrow A \cdot B = d \cdot m$

$$\frac{12}{25} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{75} \times \frac{24}{5}$$

MCD Y MCM DE FRACCIONES

Sean las fracciones irreductibles:

$f_1 = \frac{a_1}{b_1}$; $f_2 = \frac{a_2}{b_2}$; $f_3 = \frac{a_3}{b_3}$

Se cumple:

$$\boxed{MCD(f_1; f_2; f_3) = \frac{MCD(a_1; a_2; a_3)}{MCM(b_1; b_2; b_3)}}$$

También:

$$\boxed{MCM(f_1; f_2; f_3) = \frac{MCM(a_1; a_2; a_3)}{MCD(b_1; b_2; b_3)}}$$

Ejemplo

$$MCD\left(\frac{12}{25}; \frac{8}{15}\right) = \frac{MCD(12; 8)}{MCM(25; 15)} = \frac{4}{75}$$

$$MCM\left(\frac{12}{25}; \frac{8}{15}\right) = \frac{MCM(12; 8)}{MCD(25; 15)} = \frac{24}{5}$$

CLASE DE EQUIVALENCIA

Una clase de equivalencia es un conjunto cuyos elementos son fracciones equivalentes.

Ejemplo: $\left\{\ldots; \frac{-4}{-6}; \frac{-2}{-3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \ldots\right\}$

donde cualquiera de los elementos puede ser tomado como un representante de la clase, por ejemplo: $\frac{4}{6}$ y la notación sería así:

$$\left[\frac{4}{6}\right] = \left\{\ldots; \frac{-4}{-6}; \frac{-2}{-3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \ldots\right\}$$

↳ Representante de la clase

En una clase de equivalencia de los infinitos representantes que tiene, hay uno en particular cuyos términos son primos entre sí (fracción irreductible), el cual es denominado representante canónico.

Del ejemplo anterior

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\ldots; \frac{-4}{-6}; \frac{-2}{-3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \ldots\right\}$$

↳ Representante canónico de la clase

Nota

Si $\frac{x}{y} \in \left[\frac{a}{b}\right] \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

Del ejemplo

$\frac{4}{6} \in \left[\frac{2}{3}\right] \longrightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ // obs $\left[\frac{4}{6}\right] = \left[\frac{2}{3}\right]$

GRÁFICA DE UNA CLASE DE EQUIVALENCIA

Ejemplo: Sea la clase

$$\left[\frac{4}{3}\right] = \left\{\ldots; \frac{-8}{-6}; \frac{-4}{-3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{6}; \ldots\right\}$$

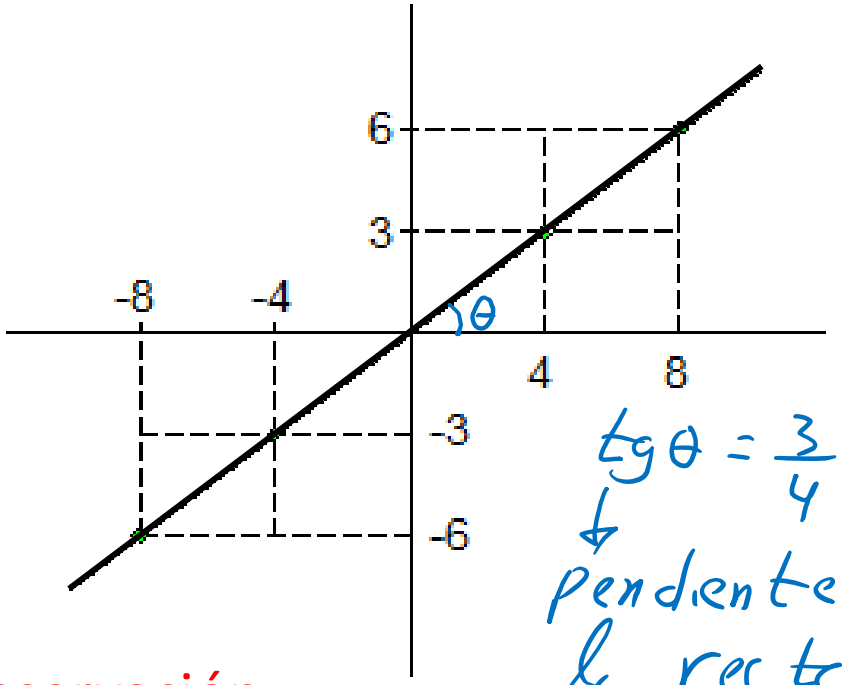
Para realizar la gráfica a cada elemento lo consideramos como un par ordenado donde el numerador será la abscisa y el denominador será la ordenada, es decir:

$\frac{-8}{-6} = (-8; -6)$

$\frac{-4}{-3} = (-4; -3)$

$\frac{4}{3} = (4; 3)$

$\frac{8}{6} = (8; 6)$



$tg\,\theta = \frac{3}{4}$

pendiente de la recta

Observación:

La gráfica de una clase de equivalencia $\left[\frac{a}{b}\right]$ son puntos discontinuos colineales que pertenecen a una recta que pasa por el origen cuya pendiente es $\frac{b}{a}$.

NÚMEROS RACIONALES

DEFINICIÓN

El conjunto de los números racionales es aquel cuyos elementos son las clases de equivalencia. Notación Q

Es decir: $Q = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] / (a,b) \in Z . Z^{*} \right\}$

Donde:

$Z = \{. . . -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; . . .\}$

$Z^{*} = \{. . . -3; -2; -1; 1; 2; 3; . . .\}$

$\left[\frac{a}{b}\right]$: número racional

Observaciones:

1. El conjunto Q es un conjunto de conjuntos, donde cada número racional (clase) tiene infinidad de representantes.

2. De manera práctica cuando hablemos del número racional $\left[\frac{2}{3}\right]$, diremos simplemente: $\frac{2}{3}$ (omitiremos el corchete)

FRACCIONES CONTINUAS SIMPLES

Son fracciones, expresadas de la siguiente forma :

Ejemplos :

* $$F_1 = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}} = [3; 2; 5; 4]$$

F_1 es una fracción continua simple finita

* $$F_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1;1;2;1;2;\ldots] = [1; \overline{1;2}]$$

F_2 es una fracción continua simple infinita

NÚMEROS RACIONALES

En general

$$F = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1; a_2; \ldots a_n]$$

donde : $a_0 \in Z$; $a_1 \in Z^+$; $i \geq 1$

$\sqrt{2} \Rightarrow$ fcs infinita

Teorema

Todo número racional puede ser expresado como una fracción continua simple finita

Teorema

Todo número irracional puede ser expresado como una fracción continua simple infinita

Ejemplo:

Expresar $\frac{24}{17}$ como una fcs

Resolución

$$\frac{24}{17} = 1 + \frac{7}{17} = 1 + \frac{1}{\frac{17}{7}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{3}}}$$

$$\frac{24}{17} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = [1; 2; 2; 3]$$

OTRO MÉTODO (Por el algoritmo de Euclides)

	1	2	2	3
24	17	7	3	1
	7	3	1	0

$$\therefore \frac{24}{17} = [1; 2; 2; 3]$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 17 \\ \hline 7 & 1 \end{array} \rightarrow 1\frac{7}{17} = 1 + \frac{7}{17}$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 7 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

PROBLEMAS

01. ¿Cuál es la diferencia de los términos de la fracción equivalente a 210/350 cuya suma de términos sea 9 696?

A) 1 818 B) 2 222 C) 2 626
D) 2 828 E) 2 424

Resolución:

Sea $f = \frac{210}{350} = \frac{3}{5} \rightarrow f_E = \frac{3k}{5k}$

Dato $3k + 5k = 9696$

$8k = 9696 \rightarrow k = 1212$

Piden $5k - 3k = 2k = 2(1212) = 2424$

02. ¿Cuántas fracciones comprendidas entre 19/43 y 23/29 son tales que sus términos son números consecutivos?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

Sea $f = \frac{n}{n+1}$

Dato $\frac{19}{43} < \frac{n}{n+1} < \frac{23}{29}$

* $19n + 19 < 43n$
$19 < 24n$
$0,x < n$

* $29n < 23n + 23$
$6n < 23$
$n < 3,8$

Obs $n = 1; 2; 3 \rightarrow 3$ valores

RPTA: 3

03. Calcule la suma de las cifras del numerador de una fracción cuyo denominador es 84, sabiendo además que dicha fracción es mayor que 1/7 pero menor que 1/6

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

Resolución:

Sea $f = \frac{N}{84}$

Dato $\frac{1}{7} < \frac{N}{84} < \frac{1}{6}$

$12 < N < 14 \rightarrow N = 13$

$\Sigma cifras = 1+3 = 4$

04. ¿Cuántas fracciones propias irreductibles son mayores que 7/13 y tienen denominador 91?

A) 10 B) 33 C) 17
D) 18 E) 36

Resolución:

Sea $f_{PI} = \frac{N}{91} \rightarrow \begin{cases} N \text{ y } 91 \text{ son PEsí} \\ 91 = 7 \times 13 \rightarrow N \neq \overset{\circ}{7}; \overset{\circ}{13} \end{cases}$

Dato $\frac{7}{13} < \frac{N}{91} < 1$

$49 < N < 91$

1°) $N = 50; 51; 52; \ldots; 90 \rightarrow 41$ valores

2°) $N \neq \left.\begin{matrix} 56; 63; 70; 77; 84 \\ 52; 65; 78; \end{matrix}\right\}$ 8 valores

$\rightarrow$ N toma $41 - 8 = 33$ valores

$\therefore$ RPTA: 33

05. ¿Cuántas fracciones propias de términos impares consecutivos existen y que se encuentren entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{19}{20}$?

A) 16 B) 15 C) 18
D) 17 E) 19

Resolución:

Sea $f_P = \frac{n}{n+2}$ impar

Dato $\frac{1}{2} < \frac{n}{n+2} < \frac{19}{20}$

* $n+2 < 2n$
$2 < n$

* $20n < 19n + 38$
$n < 38$

Obs $n = 3; 5; 7; \ldots; 37 \rightarrow 18$ val.

$\therefore$ RPTA: 18

06. Si a los dos términos de una fracción irreductible, se le suma el triple del denominador y al resultado se le resta la fracción, resulta la misma fracción. ¿Cuánto suman los términos de la fracción original?

A) 11 B) 10 C) 8
D) 3 E) 13

Resolución:

Sea $f_I = \frac{a}{b}$

Dato $\frac{a+3b}{b+3b} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

$\frac{a+3b}{4b} = \frac{2a}{b} \rightarrow a + 3b = 8a$

$3b = 7a \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{7} \rightarrow a = 3$, $b = 7$

Piden $a + b = 10$

07. El denominador de una fracción excede al numerador en una unidad. Si se agrega a ambos miembros de la fracción una unidad, la nueva fracción excede a la original de 1/42. ¿Cuál es la fracción original?

A) 3/4 B) 4/5 C) 5/6
D) 6/7 E) 7/8

Resolución:

Sea $f = \frac{n}{n+1}$

Dato $\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{42}$

$$\frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{42}$$

$42 = \underbrace{(n+2)}_{7} \times \underbrace{(n+1)}_{6} \rightarrow n = 5$

$\therefore f = \frac{5}{6}$

09. Se tiene dos fracciones irreductibles que suman 3 y la suma de sus numeradores es 15. ¿Cuántas parejas de fracciones existen con dicha condición?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución:

Sea $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ las fracc. irred.

* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 3 \rightarrow b = d \rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 3$

* $a + c = 15$ $\quad a + c = 3b \rightarrow b = 5$, $d = 5$

a	c
1	14
2	13
3	12
4	11
6	9
7	8

* $a \neq 5$
* $c \neq 5$

6 soluciones

$\therefore$ RPTA: 6

08. Dado: $MCM\left(\frac{a}{a-1}; \frac{a+2}{a+1}\right) = 144$

Calcular una fracción equivalente a: $\frac{a+2}{a+5}$ que tenga como suma de términos a 143. Dar como respuesta la diferencia de los mismos.

A) 18 B) 15 C) 21
D) 13 E) 11

Resolución:

$$MCM\left(\frac{a}{a-1}; \frac{a+2}{a+1}\right) = 144$$

$$\frac{MCM(a; a+2)}{MCD(a-1; a+1)} = 144 \quad (1)$$

Obs a es par $\rightarrow a = 2k$

En (1) $\frac{MCM(2k; 2k+2)}{\boxed{MCD(2k-1; 2k+1)}} = 144$

$\hookrightarrow 1$

$MCM(2k; 2k+2) = 144$

Entre 2

$MCM(k; k+1) = 72$

$k(k+1) = 72 \rightarrow k = 8 \rightarrow a = 16$

Luego

$\frac{a+2}{a+5} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7} \rightarrow f_E = \frac{6k}{7k}$

Dato: $13k = 143 \rightarrow k = 11$

Piden $7k - 6k = k = 11$

RPTA: 11

10. Calcule la fracción de menores términos que sea equivalente a $\frac{447}{1\,192}$ tal que la suma de sus términos sea múltiplo de 9 y la diferencia de los mismos sea múltiplo de 55. Dé como respuesta el denominador.

A) 372 B) 496 C) 432
D) 649 E) 792

Resolución:

Sea $f = \frac{447}{1192}$

1°) $MCD(447; 1192) = 149$

2°) $f_I = \frac{\frac{447}{149}}{\frac{1192}{149}} = \frac{3}{8} \rightarrow f_E = \frac{3k}{8k}$

* k es mínimo
* $11k = \overset{\circ}{9} \rightarrow k = \overset{\circ}{9}$
* $5k = \overset{\circ}{55} \rightarrow k = \overset{\circ}{11}$

Obs $k = MCM(9; 11) = 99$

Piden $8k = 8(99) = 792$

11. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\left[\frac{2}{3}\right] \cap \left[\frac{3}{2}\right] = \phi$

$\left[\frac{2}{3}\right] = \{\ldots; \frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \frac{6}{9}; \ldots$

$\left[\frac{3}{2}\right] = \{\ldots; \frac{3}{2}; \frac{6}{4}; \frac{9}{6}; \ldots\}$

II. $\left[\frac{8}{36}\right] \cap \left[\frac{26}{117}\right] \neq \Phi$

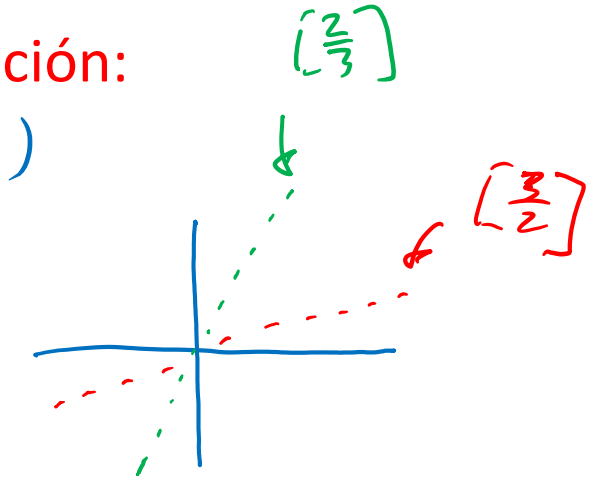
III. La gráfica correspondiente a una clase de equivalencia , es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

A) FVF B) VVV C) VVF
D) VFV E) VFF

$\left[\frac{4}{6}\right] = \left[\frac{2}{3}\right]$ porque $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Resolución:

I (V)



Obs $\left[\frac{2}{3}\right] \cap \left[\frac{3}{2}\right] = \emptyset$

II (V)

$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$; $\frac{26}{117} = \frac{2}{9} \rightarrow \left[\frac{8}{36}\right] = \left[\frac{26}{117}\right]$

III (F)

RPTA: VVF

12. Hallar un elemento de $\left[\frac{4}{7}\right]$ y otro de $\left[\frac{2}{5}\right]$ tal que la suma de términos de la primera sea igual a la suma de términos de la segunda. Se sabe que las fracciones son positivas y sus términos son menores que 100. Dar como respuesta la suma de denominadores.

A) 101 B) 102 C) 103
D) 104 E) 105

Resolución:

Sea $\frac{a}{b} \in \left[\frac{4}{7}\right] \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{7} \rightarrow \begin{cases} a = 4k \\ b = 7k \end{cases}$

$\frac{c}{d} \in \left[\frac{2}{5}\right] \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} c = 2Q \\ d = 5Q \end{cases}$

Dato: $a+b = c+d \rightarrow 11k = 7Q \rightarrow k = 7;\ Q = 11$

$a; b; c; d < 100$

Piden $b+d = 49+55 = 104$

13. Desarrolle en fracción continua simple el número $\frac{150}{47}$ y dar la suma de sus términos

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

Resolución:

$\frac{150}{47} \rightarrow$ fcs

Por el algoritmo de Euclides

	3	5	4	2
150	47	9	2	1
	9	2	1	0

$$\frac{150}{47} = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}$$

Piden $3+5+4+2 = 14$

14. Para cuántos valores de N menores que 200 se hace reductible la fracción:

$$F = \frac{N^2 + 126N}{N+1}$$

A) 39 B) 40 C) 41
D) 42 E) 43

Resolución:

$N < 200$

$F = \frac{N^2 + 126N}{N+1} \rightarrow$ Reductible

$F = \frac{N(N+126)}{N+1} = \frac{N(N+1+125)}{N+1}$ 5^3

Obs $N+1 = \overset{\circ}{5}$

$N = 4; 9; 14; 19; \ldots; 199 \Rightarrow 40$ val.

$\therefore$ RPTA: 40

15. Perdí 3/4 de lo que tenía. Si hubiera perdido los 2/3 de lo que perdí, tendría S/. 600 más de lo que tengo ahora. ¿Cuánto tengo?

A) 2 400 B) 1 800 C) 300
D) 1 200 E) 600

Resolución:

Tenía: $12k$

Perdí $\frac{3}{4}(12k) = 9k \rightarrow$ tengo: $3k$

Si hubiera perdido $\frac{2}{3}(9k) = 6k$

tendría: $6k$

Dato $6k - 3k = 600$

$3k = 600 \rightarrow k = 200$

$\therefore$ Tengo: $3(200) = S/600$

16. Los obreros A, B y C hacen una obra en 18 días. A y B hacen la misma obra en 30 días. ¿En cuántos días hace la obra C trabajando solo?

A) 50 B) 60 C) 90
D) 84 E) 45

Resolución:

A; B y C ⇒ 18 días

A y B ⇒ 30 días

En 1 día;

A; B y C hacen $\frac{1}{18}$

A y B hacen $\frac{1}{30}$ (−)

Obs C hace en 1 día: $\frac{1}{18} - \frac{1}{30} = \frac{1}{45}$

∴ C lo hace en 45 días

17. Antes de la votación, los 3/4 del total apoyaban una lista A, la mitad del resto votarían por B y 27 estaban indecisos. Después de la votación, los resultados mostraron que sólo la mitad de los que apoyaban la lista A votaron por ella, 1/9 del total no votó y el resto votó por B. ¿Cuántos votos de diferencia obtuvieron las listas A y B?

A) 24 B) 25 C) 30
D) 31 E) 35

Resolución:

Sea el total de votantes: 72k

	Antes	Después
A	54k	27k
B	9k	37k
IND	9k	8k

> 10k

Dato: 9k = 27 → k = 3

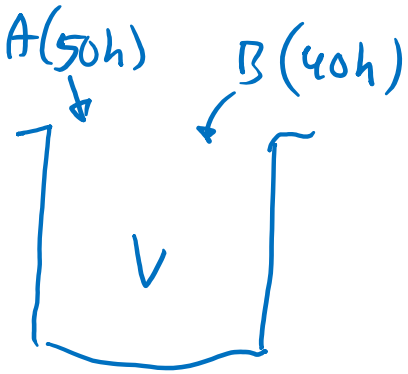
Piden 10k = 10(3) = 30

18. Dos caños alimentan un estanque. El primero puede llenarlo en 50 horas y el segundo en 40 horas. Se deja correr el primero durante 15 horas y después el segundo durante 16 horas. Enseguida se retiran 900 L y luego se abren las dos llaves constatándose que el estanque termina por llenarse en 10 horas. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

A) 3 000 L B) 6 000 L C) 8 000 L
D) 4 000 L E) 9 000 L

Resolución:

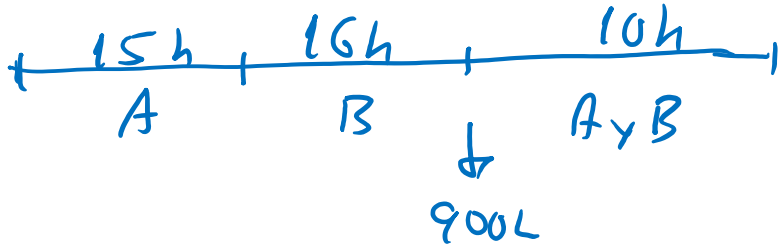
Sea $V = 200k$



En 1 hora

A llena $\frac{1}{50}(200k) = 4k$

B llena $\frac{1}{40}(200k) = 5k$



Se cumple

$(4k)15 + (5k)16 - 900 + (9k)10 = 200k$

$60k + 80k - 900 + 90k = 200k$

$30k = 900 \rightarrow k = 30$

Piden $V = 200(30)$

$\therefore V = 6000\ L$

PROBLEMAS

19. Un tonel tiene 100 litros de vino, se saca 1/5 y se reemplaza por agua. Luego se saca 1/5 de la mezcla y se reemplaza por agua. Luego se saca 1/4 y se vuelve a reemplazar por agua. ¿Qué cantidad de vino queda en el tonel al final?

A) 12 B) 14 C) 16
D) 48 E) 20

Resolución:

20. Una señorita tiene el hábito de lavarse la cabeza diariamente, utilizando la misma cantidad de champú. Después de 20 días observa que ha consumido la cuarta parte del frasco. Veinticinco días más tarde verifica que aún le quedan 105 cm^3. ¿Cuántos cm^3 de champú consume diariamente en cada lavada de cabeza?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS